

KREISGEOMETRISCHE SCHLIEßUNGSSÄTZE
IN SCHIEFKÖRPERN

DISSERTATION
zur
Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von
Poland Graf
aus Gelsenkirchen

Bochum 1985



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546407_0058

KREISGEOMETRISCHE SCHLIEBUNGSSÄTZE
IN SCHIEFKÖRPERN

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der

Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von

Poland Graf

aus Gelsenkirchen

Bochum 1985

Referent: Prof. Dr. W. Benz

Koreferenten: Prof. Dr. G. Ewald

Prof. Dr. S. Elliger

Die vorliegende Arbeit ist eine Darstellung der Geschichte der deutschen Literatur von der Mitte des 18. Jahrhunderts bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts. Sie ist in drei Teile gegliedert: I. Die deutsche Literatur von der Mitte des 18. Jahrhunderts bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts. II. Die deutsche Literatur von der Mitte des 18. Jahrhunderts bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts. III. Die deutsche Literatur von der Mitte des 19. Jahrhunderts bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts.

I. Die deutsche Literatur von der Mitte des 18. Jahrhunderts bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts.

Die deutsche Literatur von der Mitte des 18. Jahrhunderts bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts ist eine Zeit der großen Aufklärung. In dieser Zeit haben die deutschen Dichter und Schriftsteller die deutsche Sprache und Literatur zu einer Höhe gebracht, die bis dahin nicht erreicht war. Die deutsche Literatur ist in dieser Zeit zu einer selbstständigen Literatur geworden, die nicht mehr von der französischen Literatur abhängig ist.

Die deutsche Literatur von der Mitte des 18. Jahrhunderts bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts ist eine Zeit der großen Aufklärung. In dieser Zeit haben die deutschen Dichter und Schriftsteller die deutsche Sprache und Literatur zu einer Höhe gebracht, die bis dahin nicht erreicht war. Die deutsche Literatur ist in dieser Zeit zu einer selbstständigen Literatur geworden, die nicht mehr von der französischen Literatur abhängig ist.

Die deutsche Literatur von der Mitte des 18. Jahrhunderts bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts ist eine Zeit der großen Aufklärung. In dieser Zeit haben die deutschen Dichter und Schriftsteller die deutsche Sprache und Literatur zu einer Höhe gebracht, die bis dahin nicht erreicht war. Die deutsche Literatur ist in dieser Zeit zu einer selbstständigen Literatur geworden, die nicht mehr von der französischen Literatur abhängig ist.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
1. Kapitel	
Der Satz von Miquel in Schiefkörpern	5
2. Kapitel	
Einbettung von miquelschen Möbiusebenen	19
3. Kapitel	
Angabe eines notwendigen und hinreichenden Kriteriums zur Gültigkeit des Büschelsatzes in Schiefkörpern	31
	44
Literaturverzeichnis	
	46

Einleitung

In seinen "Vorlesungen über Geometrien der Algebren" (13) beschreibt Walter Benz Kettengeometrien in K -Algebren, welche mindestens die Dimension 2 besitzen. Die projektive Gerade über einer solchen kommutativen, assoziativen Algebra mit Einselement wird Trägermenge $\mathcal{P}$ einer Geometrie.

Auf dieser Menge läßt sich eine Äquivalenzrelation sinnvoll einführen, die Parallelität unter Punkten. Ketten dieser Geometrie gewinnt man mittels des Doppelverhältnisbegriffes. So mögen vier nicht parallele Punkte aus $\mathcal{P}$ auf einer Kette liegen, wenn ihr Doppelverhältnis in der projektiven Gerade über K liegt. Diese nämlich bettet sich in $\mathcal{P}$ ein.

In diesen Geometrien stellt man die Fragen nach der Gültigkeit zweier Schließungssätze, des Satzes von Miquel und des Büschelsatzes. Wenngleich beiden Sätzen $(8,3)$ -Konfigurationen zugrunde liegen, ist doch der Zusammenhang zwischen der algebraischen Struktur der Algebra auf der einen Seite und der Gültigkeit des Satzes auf der anderen recht unterschiedlich.

Betrachtet man nun den Fall, daß die Algebra speziell ein Körper ist, so wird die Parallelität zur Gleichheitsrelation. Eine solche Geometrie heißt Möbiusgeometrie.

Die Peczar-Identität liefert hier die generelle Gültigkeit des Miquelschen Satzes. Dies wiederum zieht für den Fall der Möbiusebene - die Algebra hat hier Dimension zwei über K - die Möglichkeit der algebraischen Beschreibung als affine Ebene über einem Körper nach sich. Dies liefert uns ein Satz von van der Waerden und Smid.

Der Büschelsatz gilt jedoch nicht generell. Benz (12) zeigt aber, daß er dann gilt, wenn die Algebra fastquadratisch über K ist.

Ich betrachte nun auf Anregung von Prof. Dr. Günter Ewald Schiefkörper als assoziative Algebren mit Einselement über ihrem Zentrum K . Analog zur oben beschriebenen Konstruktion strukturiere ich sie zu "nichtkommutativen Möbiusgeometrien".

Ewald bewies in diesen Geometrien die Gültigkeit des Satzes von Miquel und regte mich an, in der hiermit vorgelegten Arbeit Zusammenhänge zwischen der Gültigkeit der beiden oben genannten Schließungssätze auf der einen Seite und der algebraischen Struktur des Schiefkörpers über seinem Zentrum - oder einem Teilkörper dessen - auf der anderen Seite zu untersuchen.

Im ersten Kapitel stelle ich die Konstruktion der Geometrie in Schiefkörpern und den oben genannten Beweis von Ewald vor.

Im zweiten Kapitel zeige ich mit Hilfe des Satzes von Miquel, unter welchen Umständen sich in diese Geometrie Möbiusebenen einbetten lassen und gebe diese mengenmäßig an.

Im dritten und letzten Kapitel zeige ich, daß der Büschelsatz auch im nichtkommutativen Fall dann gilt, wenn der Schiefkörper als K -Algebra fastquadratisch über K ist. Außerdem weise ich darauf hin, daß dieses Kriterium umkehrbar ist.

Es stellt sich nun folgerichtig die Frage, ob eine weitere Verallgemeinerung, etwa das Betrachten einer Kettengeometrie in allgemeinen nichtkommutativen Algebren sinnvoll ist.

Ich habe Herrn Prof. Dr. Günter Ewald nicht nur für die Anregung zu dieser Arbeit zu danken. Außerdem betreute er die Erstellung mit großer Geduld.

Weiter zu danken habe ich Heinz-Reiner Friedlein, Bernd Kind, Udo Pachner und Peter Kleinschmidt für ihr aufmerksames Interesse

an Oberseminarvorträgen. Bernd Kind hat auch in vielen kritischen Einzelgesprächen zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen.

Herrn Rainer Waschkowitz bin ich für die Anfertigung der Zeichnungen dankbar.

Auch gilt mein Dank Frau Elke Lau, die mit viel Engagement und großer Sorgfalt die Schreibarbeiten erledigte.

Der Satz von Miquel in Schiefkörpern

Gegeben sei ein Schiefkörper L von beliebiger Vektorraumdimension über seinem Zentrum K' . K sei ein Teilkörper von K' , welcher seinerseits eine Charakteristik $\neq 2$ aufweise. Wir bezeichnen mit $\mathcal{P} := L \cup \{\infty\}$ die projektive Gerade über L .

Definition 1: $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ mit den Zuordnungsvorschriften

$$\left\{ \begin{array}{ll} \infty \neq z \rightarrow (az + b)(cz + d)^{-1} & \text{falls } cz + d \neq 0 \\ \infty \neq z \rightarrow \infty & \text{sonst} \\ \infty \rightarrow ac^{-1} & \text{falls } c \neq 0 \\ \infty \rightarrow \infty & \text{sonst} \end{array} \right.$$

heiße lineare Abbildung auf $\mathcal{P}$, wenn $l(a,b) \neq (c,d)$ für alle $l \in L$ und $(a,b) \neq (0,0)$ ist. $\Gamma(\mathcal{P})$ sei die Gesamtheit dieser linearen Abbildungen.

Satz 1: $\Gamma(\mathcal{P})$ trägt Gruppenstruktur bzgl. Verkettung und wird erzeugt von Abbildungen des Types

$$1 \quad \begin{cases} z \rightarrow z^{-1} \\ 0 \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} z \rightarrow az & (a \in L^*) \\ \infty \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$3 \quad \begin{cases} z \rightarrow z+b & (b \in L) \\ \infty \rightarrow \infty \end{cases}$$

Beweis: siehe BENZ (9)

Aus der gleichen Arbeit von BENZ geht hervor der

Satz 2: Die inneren Automorphismen $z \rightarrow aza^{-1}$ ($a \in L^*$), $\infty \rightarrow \infty$ sind genau die linearen Abbildungen, welche ∞ , 0, 1 festlassen.

Die Menge dieser inneren Automorphismen sei mit $\Gamma_{\infty,0,1}(\mathcal{P})$ bezeichnet. Eine andere ausgezeichnete Menge linearer Abbildungen ist die, deren Elemente $\infty \in \mathcal{P}$ festlassen:

$\Gamma_{\infty}(\mathcal{P}) := \{ f \mid f \text{ lineare Abbildung mit } f(\infty) = \infty \}$. Dieser Menge gehören genau die Abbildungen an, deren Koeffizient c aus Definition 1 verschwindet.

Auch $\Gamma_{\infty,0,1}(\mathcal{P})$ und $\Gamma_{\infty}(\mathcal{P})$ tragen Gruppenstruktur bezüglich Verketteten. Somit gilt:

$$\Gamma_{\infty,0,1}(\mathcal{P}) < \Gamma_{\infty}(\mathcal{P}) < \Gamma(\mathcal{P}).$$

Neben dem Begriff der linearen Abbildung wird auch der des Doppelverhältnisses im folgenden von zentraler Bedeutung sein. Wir führen ihn nun ein mit

Definition 2: a, b, c, d seien vier paarweise verschiedene Elemente aus $\mathcal{P}$. Dann heiÙe $DV(a, b; c, d) := (a-d)^{-1}(a-c)(b-c)^{-1}(b-d) \in L^* \setminus \{1\}$ das Doppelverhältnis von a, b, c, d (in dieser Reihenfolge).

Wir definieren nun weiter:

$$DV(a, b; a, d) = 0$$

$$DV(a, b; b, d) = \infty$$

$$DV(a, b; d, d) = 1$$

für $a, b, d \in \mathcal{P}$, welche wieder paarweise verschieden seien. Alle Differenzen, in denen der Wert ∞ auftritt, setze man formal gleich eins.

Die im ersten Teil dieser Definition gegebene Aussage $DV \in L^* \setminus \{1\}$ ist schnell verifiziert.

Satz 3: und Definition 3: $f(z) := DV(a,b; z,d)$ ist für drei paarweise verschiedene Elemente $a,b,d \in \mathcal{P}$ eine lineare Abbildung.

Abbildungen dieser Gestalt heißen Doppelverhältnisabbildungen.

Dieser Satz bedarf keines Beweises. Ein weiterer starker Zusammenhang zwischen Doppelverhältnissen und linearen Abbildungen wird in den nächsten Sätzen deutlich.

Satz 4: Die linearen Abbildungen operieren dreifach transitiv auf $\mathcal{P}$.

Satz 5: Ein Doppelverhältnis wird unter einer linearen Abbildung konjugiert. Somit bleibt es invariant, wenn es im Zentrum K' von L liegt oder gleich ∞ ist.

Die Aussage von Satz 4 ergibt sich unmittelbar daraus, daß man, wie im zweiten Teil von Definition 2 angegeben, zu drei beliebigen, paarweise verschiedenen Elementen von $\mathcal{P}$ eine Doppelverhältnisabbildung angeben kann, die diese Elemente geordnet auf $0,1,\infty$ abbildet.

Beweis von Satz 5: In Satz 1 sind drei Typen $\Gamma(\mathcal{P})$ erzeugender Abbildungen genannt. Zu Typ 1:

$$f(z) = \begin{cases} z^{-1} & z \in L^* \\ \infty & z = 0 \\ 0 & z = \infty \end{cases}.$$

Seien $a, b, d \in \mathcal{P}$ paarweise verschieden. Dann gilt

$$DV(f(a), f(b); f(c), f(d)) = d \, DV(a, b; c, d) d^{-1} \text{ für } d \in L^*.$$

Im Falle, daß $d \in \mathcal{P} \setminus L^*$ führen einfache Überlegungen zu analogen Ergebnissen. Die beiden anderen Typen erzeugender Abbildungen lassen das Doppelverhältnis gänzlich invariant.

Nun sind wir im Stande, in die projektive Gerade $\mathcal{P}$ über einem Schiefkörper L (mit den oben genannten Eigenschaften und Bezeichnungsweisen) eine räumliche Möbiusgeometrie hineinzutragen.

Sämtliche Elemente von $\mathcal{P}$ seien von nun an Punkte genannt und mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet $\{A, B, C, \dots\}$.

Definition 4: Drei paarweise verschiedene Punkte A, B, C seien gegeben. Unter einem Kreis (durch A, B, C) verstehen wir genau die Menge aller Punkte $X \in \mathcal{P}$ mit der Eigenschaft $DV(A, B; X, C) \in K \cup \{\infty\}$.

Gleichheit zweier Kreise bedeute mengenmäßige Gleichheit der zugrundeliegenden Punktmengen. Kreise seien bezeichnet mit $k_1, k_2, \dots$.

Man sagt, daß ein Kreis k durch den Punkt A geht und der Punkt A auf dem Kreis k liegt, wenn $A \in k$ gilt. K heißt der die Kreise tragende Körper.

Aus Satz 4 und Satz 5 ergibt sich weiter der

Satz 6: Die linearen Abbildungen stellen auf $\mathcal{P}$ transitiv operierende Kreisverwandtschaften dar.

Satz 7: Auf einem Kreis liegen mindestens drei paarweise verschiedene Punkte.

Die Behauptung ergibt sich auf der Kreisdefinition. Außerdem gilt

Satz 8: Durch drei Punkte geht genau ein Kreis.

Dies ergibt sich daraus, daß, wie man nachrechnet, $K \cup \{\infty\}$ der einzige Kreis durch $0, 1, \infty$ ist.

Definition 5: k_1, k_2 seien zwei Kreise mit gemeinsamem Punkt $B \in \mathcal{P}$; also:

$$\begin{aligned} k_1 &= \{ X \mid DV(A, B; X, C) \in K \cup \{\infty\} \} \\ k_2 &= \{ X \mid DV(A', B; X, C') \in K \cup \{\infty\} \}, \end{aligned}$$

wobei A, B, C und A', B, C' je paarweise verschieden seien. k_1 berühre k_2 in B , genau dann, wenn

$DV(A, B; A', C) - DV(A, B; C', C) \in K \cup \{\infty\}$ gilt. Diesen Sachverhalt gibt man wieder mit der Bezeichnungsweise $k_1 B k_2$.

Satz 9: Die Berührrelation bleibt unter den linearen Abbildungen invariant.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar daraus, daß die zwei Doppelverhältnisse $DV(A, B; A', C)$ und $DV(A, B; C', C)$ mit dem gleichen $l \in L \setminus \{0\}$ konjugiert werden, wenn man eine lineare Abbildung auf die in sie eingehenden Größen anwendet.

Satz 10: Die Berührrelation ist Äquivalenzrelation auf K_B , also der Menge aller Kreise durch B .

Der Beweis folgt aus der Behauptung von

Satz 11: Zwei Kreise k_1, k_2 berühren sich genau dann in einem Punkt B , wenn es ein $f \in \Gamma(\mathcal{P})$ gibt mit

- (i) $f(B) = \infty$
- (ii) $M_1 := f(k_1 \setminus \{B\}) = K$
- (iii) $M_2 := f(k_2 \setminus \{B\})$ liegt als affine Gerade mit M_1 in einem zweidimensionalen K -Unterraum von L
- (iv) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ oder $M_1 = M_2$

Der Beweis dieses Satzes folgt aus Satz 9 mit $f(X) = DV(A, B; X, C)$ (Bezeichnungsweise von Def. 4).

Aus Satz 11 folgen zwei weitere, für Berührstrukturen relevante Sätze, nämlich

Satz 12: Ist k_1 ein Kreis, sind A, B Punkte mit $A \in k_1, B \notin k_1$, so gibt es genau einen Kreis k_2 mit $k_1 A k_2$ und $B \in k_2$.

Satz 13: Aus $k_1 A k_2$ und $k_1 \neq k_2$ folgt $\{A\} = k_1 \cap k_2$.

Zusammenfassend ist es uns also für den Fall $L \neq K$ gelungen, in $\mathcal{P}$ eine räumliche kreisgeometrische Struktur, Möbiusstruktur, hineinzulegen. Diese Struktur genügt den folgenden Postulaten.

- (MI) Durch drei paarweise verschiedene Punkte geht genau ein Kreis (Satz 8).
- (MII) Auf einem Kreis liegen mindestens drei paarweise verschiedene Punkte (Satz 7). Es gibt vier Punkte, die nicht gemeinsam auf einen Kreis liegen ($L \neq K$).
- (MIII) Es gibt eine Berührrelation zwischen Punkten und Kreisen mit den Eigenschaften (BI), (BII) und (BIII).

(BI)

Berühren sich zwei Kreise in einem Punkt, so sind sie gleich oder haben nur diesen einen Punkt gemeinsam (Satz 13).

(BII)

Berühren in einem ausgezeichneten Punkt ist Äquivalenzrelation auf der Menge aller Kreise durch eben diesen Punkt (Satz 10).

(BIII)

Zu einem Kreis k_1 durch A und einem nicht auf k_1 gelegenen Punkt B gibt es genau einen Kreis k_2 durch B, welcher k_1 in A berührt (Satz 12).

Die bis hierhin konstruierte und beschriebene Geometrie wollen wir im folgenden "nichtkommutative Möbiusgeometrie" nennen.

Anmerkung:

1. Die Umkehrung von Satz 13 gilt nicht notwendig. So erhält man beispielsweise für $L = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$, $K = \mathbb{R}$ zwei Kreise $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = k_1$ und $i + \mathbb{R} \cdot (i - j) \cup \{\infty\}$ als k_2 , es gilt

$$k_1 = \{ X \mid DV(0, \infty; X, 1) \in \mathbb{R} \in \{\infty\} \} \quad \text{und}$$

$$k_2 = \{ X \mid DV(i, \infty; X, j) \in \mathbb{R} \in \{\infty\} \},$$

mit $k_1 \cap k_2 = \{\infty\}$. Diese berühren sich nicht im Sinne der Definition.

Gilt jedoch die Umkehrung, so spricht man von einer strengen Berührrelation und der Struktur einer Möbiusebene.

2. In Analogie zu BENZ (13) S. 197, 198 kann man zeigen, daß die in Definition 5 gegebene Berührrelation die einzige $\mathbb{P}(\mathcal{D})$ -invariante Relation ist mit den Eigenschaften (BI), (BII) und (BIII).

Von zentraler Bedeutung für die folgenden Ausführungen ist der Satz von Miquel (M) (vgl. BENZ (13), Seite 218). Seien

$A, B, C, D, A', B', C', D'$ acht paarweise verschiedene Punkte.
Liegen dann die fünf Quadrupel $ABCD, ADA'D', ABA'B',$
 $BCB'C', CDC'D'$ je auf einem Kreis, so gilt dies auch für
die Punkte $A'B'C'D'$.

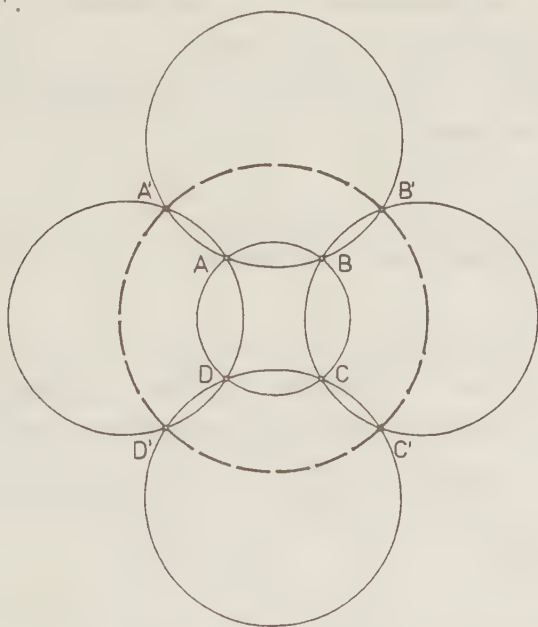


Abb. 1

Man kann sich die Aussage auch folgendermaßen vergegenwärtigen:

Man habe acht verschiedene Punkte als Ecken eines Quaders. Liegen

in fünf Fällen die Ecken einer Quaderfläche auf einem Kreis,
so gilt dies auch im sechsten Fall.

Für die nichtkommutative Situation erstaunlich ist die
Gültigkeit von

Satz 14: In der nichtkommutativen Möbiusgeometrie gilt der
Satz von Miquel (M).

Beweis (siehe Abb. 1): Man weiß

$$\begin{aligned}DV(A, B; C, D) &\in K, & DV(A, A'; D, D') &\in K \\DV(A, A'; B, B') &\in K, & DV(B, B'; C, C') &\in K \\DV(C, C'; D, D') &\in K & \text{und es ist zu zeigen} \\DV(A', B'; C', D') &\in K.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}K &\ni DV(D, A'; D', A) \cdot DV(A', B; B', A) \cdot DV(B, D; C, A) \\&= [(D-A)^{-1}(D-D')(A'-D')^{-1}(A'-A)] \cdot [(A'-A)^{-1}(A'-B')(B-B')^{-1}(B-A)] \\&\quad \cdot [(B-A)^{-1}(B-C)(D-C)^{-1}(D-A)] \\&= (D-D')(A'-D')^{-1}(A'-B')(B-B')^{-1}(B-C)(D-C)^{-1} \quad \text{und}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K &\in DV(D, B; A, C) \cdot DV(B, C'; B', C) DV(C', D; D', C) \\
 &= [(D-C)^{-1}(D-A)(B-A)^{-1}(B-C)] \cdot [(B-C)^{-1}(B-B')(C'-B')^{-1}(C'-C)] \\
 &\quad [(C'-C)^{-1}(C'-D')(D-D')^{-1}(D-C)] \\
 &= (D-A)(B-A)^{-1}(B-B')(C'-B')^{-1}(C'-D')(D-D')^{-1}.
 \end{aligned}$$

Durch Multiplikation erhält man

$$\begin{aligned}
 r : &= (D-A)(B-A)^{-1}(B-B')(C'-B')^{-1}(C'-D')(A'-D')^{-1}(A'-B')(B-B')^{-1} \\
 &\quad (B-C)(D-C)^{-1} \in K
 \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
 DV(C', A'; D', B') &= (B-B')^{-1}(B-A), (D-A)^{-1}r(D-C)(B-C)^{-1}(B-B') \\
 &= r(B-B')^{-1}(B-A) \underbrace{(D-A)^{-1}(D-C)(B-C)^{-1}(B-A)}_{= DV(D, B; C, A)} (B-A)^{-1}(B-B') \\
 &= DV(D, B; C, A) \\
 &= r DV(D, B; C, A) \in K.
 \end{aligned}$$

Dieser Beweis geht zurück auf EWALD.

Der zuletzt bewiesene, erstaunliche Sachverhalt der Gültigkeit dieses Schließungssatzes in der "nichtkommutativen Möbiusgeometrie"

legt es nahe, Zusammenhänge zwischen geometrischen und algebraischen Strukturen in Schiefkörpern zu untersuchen.

Einbettung von miquelschen Möbiusebenen

Läge in der nichtkommutativen Möbiusgeometrie eine strenge Berührrelation vor, d.h. zöge der aus einem Punkt bestehende mengenmäßige Schnitt zweier Kreise das Berühren nach sich, dann hätte man die Situation einer Möbiusebene. In diesem Falle kann man mit Hilfe eines Satzes von YI CHEN auf die Gültigkeit des vollen Satzes von Miquel (VM) schließen.

Voller Satz von Miquel (vergleiche in der Formulierung BENZ (13), Seite 206 und siehe Abb. 2)

Es seien $W, A_1, A_2, A_3, P_1, P_2, P_3$ sieben verschiedene Punkte und $a_1, a_2, a_3, p_1, p_2, p_3$ Kreise mit

$$P_i, W, A_{i+1}, A_{i+2} \in a_i$$

$$A_i, P_{i+1}, P_{i+2} \in p_i,$$

wobei die Indizes - modulo 3 genommen - über 1,2,3 laufen.
Gilt dann $p_2 \cap p_3 = \{P_1, Q\}$ mit $Q \neq P_2, P_3$, so folgt $Q \in p_1$.

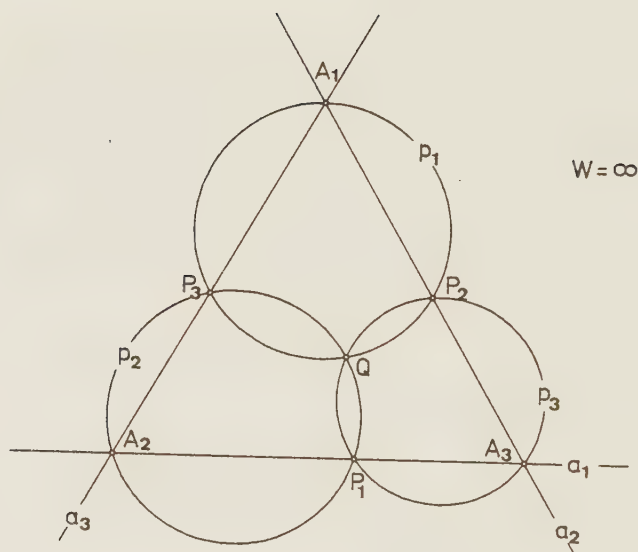


Abb. 2

Ist die Gültigkeit dieses Satzes in einer Möbiusebene gesichert, so liefert der Satz von van der Waerden und Smid einen Brückenschlag zwischen geometrischen und algebraischen Strukturen.

Satz von van der Waerden und Smid (man vgl. auch hier
BENZ (13), Seite 206/207):

Gegeben sei eine Möbiusebene, in der der Satz (VM) gilt. Dann
gibt es einen kommutativen Körper $\tilde{K}$ und eine quadratische
Form

$$Q(x, y) = px^2 + rxy + qy^2 \in \tilde{K}[x, y],$$

für die $Q(\alpha, \beta) = 0, \alpha, \beta \in \tilde{K}$, nur die Lösung $\alpha = 0 = \beta$ besitzt,
derart, daß die Menge der Punkte der Möbiusebene sich zusammen-
setzt aus dem Symbol ∞ und der affinen Ebene $A(\tilde{K})$ über $\tilde{K}$. Kreise
der Geometrie sind die Mengen $g \cup \{\infty\}$, wobei g Gerade in der
Ebene ist, und Mengen der Gestalt:

$$K(a, b, c) = \{(x, y) \mid Q(x, y) + ax + by + c = 0\},$$

sofern $|K(a, b, c)| \geq 3$ ist.

Somit haben wir im folgenden ein Interesse an Mengen $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$,
welche durch die "nichtkommutative Möbiusgeometrie" induzierte
Strukturen von Möbiusebenen tragen.

So trägt beispielsweise $\mathcal{F} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die klassische Struktur einer Möbiusebene in $\mathcal{P} := \mathbb{H}_{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$. Beidemale sei $\mathbb{R}$ der die Kreise tragende Körper.

Konkretisieren wir also sinnvoll unsere Forderungen an solche Einschränkungen.

Definition 6: Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ heiÙe Möbiushülle oder kurz Hülle, wenn sie den folgenden Forderungen genügt

- (i) Liegen drei Punkte aus $\mathcal{P}$ in $\mathcal{F}$, so liegt auch der durch sie bestimmte Kreis aus $\mathcal{P}$ in $\mathcal{F}$.
(Solche Kreise seien $\mathcal{F}$ -Kreise genannt)

und weiter

- (ii) besitzt mit diesen $\mathcal{F}$ -Kreisen die Struktur einer Möbiusebene.

Aus den Anforderungen an $\mathcal{F}$ ergibt sich die mengenmäßige Gleichheit von $\mathcal{F}$ - und $\mathcal{P}$ -Kreisen. Im Falle der $\mathcal{F}$ -Geometrie ist jedoch das Berühren zweier ungleicher Kreise gleichbedeutend mit dem Schnitt in genau einem Punkt, während in Definition 5 das Berühren zweier $\mathcal{P}$ -Kreise mit Doppelverhältnissen

eingeführt wird. Es gilt jedoch der

Satz 15: Schneiden sich zwei $\mathcal{F}$ -Kreise in genau einem Punkt, so berühren sie sich als $\mathcal{P}$ -Kreise im Sinne von Definition 5.

Beweis: Man habe $k_1, k_2 \subset \mathcal{F}$, $k_1 \neq k_2$, $k_1 \cap k_2 = \{A\}$ und $A, B, C, \in k_1$ und betrachte $f(X) = DV(A, B; X, C)$, wobei $k_1 \not\equiv D \in k_2$. Man verifiziert nun leicht $f(\mathcal{F}) = \langle 1, f(D) \rangle \cup \{\infty\}$ und erhält die Behauptung. Zu berücksichtigen sind Satz 11 und der Umstand, daß alle Kreise durch den Punkt ∞ nach Herausnahme dieses Punktes in Geraden aus L über K übergehen.

Wenden wir uns nun der Frage zu, unter welchen Umständen in einer räumlichen Möbiusgeometrie derartige Hüllen existieren und wodurch sie bestimmt werden. Das Beispiel der reellen Quaternionen, legt es nahe, zu untersuchen, wann durch vier paarweise verschiedene nicht konzyklische Punkte eine solche Möbiusebene verläuft.

Satz 16: Es gibt genau dann eine (eindeutige) Hülle $\mathcal{F}$ durch vier paarweise verschiedene, nicht konzyklische Punkte A, B, C, D aus $\mathcal{P}$, wenn $DV(A, B; D, C)$ Nullstelle eines unzerlegbaren Polynomes

2. Grades in $K[X]$ ist. Diese Hülle ist dann gleich

$$\{X \in \mathcal{P} \mid DV(A,B; X,C) \in \langle 1, DV(A,B; D,C) \rangle\} \cup \{B\}.$$

Beweis: Für den Beweis beider Richtungen kann ich o.B.d.A. voraussetzen $A = 0$, $B = \infty$, $C = 1$ und es ergibt sich weiter $DV(A,B; D,C) = D$.

" $\Leftarrow$ " D sei nun Nullstelle eines unzerlegbaren Polynoms zweiten Grades $p \in K[X]$. Somit trägt $\langle 1, D \rangle$ die mit der multiplikativen Struktur von L verträgliche Körperstruktur $K[X]_{\langle p \rangle}$ und $\langle 1, D \rangle \cup \{\infty\}$ ist eine solche Hülle. Die Eindeutigkeit ergibt sich konstruktiv wie im Beweis von Satz 15.

" $\Rightarrow$ " Nun trage umgekehrt $\langle 1, D \rangle \cup \{\infty\}$ die Struktur einer (miquel-schen) Möbiusebene; schließlich muß jede Hülle durch $0, 1, \infty, D$ mengenmäßig so aussehen (vgl. oben). In einer solchen Geometrie gilt ein weiterer Miquelscher Satz: (man vgl. BENZ (13), Seite 207)

(VM) Gegeben seien Kreise a_1, a_2, a_3 durch W mit $\{W, A_i\} = a_{i+1} \cap a_{i+2}$
(es gelte dieselbe Konvention hinsichtlich der Indizes wie

Also

$$Q = n + D \text{ mit } n \in K^*.$$

Dies zieht nach sich

$$DV(0, D; n + D, 1) = r \notin K^* \setminus \{1\} \text{ also}$$

$$D^2 + (n - 1) D + (r - 1) n = 0,$$

was bedeutet, daß

$$D \in L \setminus K$$

Nullstelle des Polynomes

$$p(x) = x^2 + (n - 1)x + (r - 1)n$$

ist.

$$p(x) \in K[x]$$

ist unzerlegbar, sonst hätte es zwei Nullstellen in K und keine mehr in $L \setminus K$. Dieser Schluß ist auch im nichtkommutativen möglich, wie man sich leicht überlegt.

Ist $Q = D$, so liefert eine ähnliche Betrachtung des Kreises durch die Punkte $1, D, 2, 2 + D$ ein anderes Polynom zweiten Grades, $q(x) \in K[x]$ mit $q(D) = 0$. Damit ist alles gezeigt.

Betrachtet man den Satz von van der Waerden/Smid, so liefert dieser ebenfalls eine Geometrie in einer Trägermenge, welche sich zusammensetzt aus einem Punkt $\{\infty\}$ und einer affinen Ebene über einem Körper K . Diese Ebene trägt ebenfalls die algebraische Struktur einer quadratischen Körpererweiterung F von K , geliefert durch die quadratische Form.

Ein Satz aus BENZ (13, S. 229) besagt nun, daß die Klasse der miquelschen Möbiusebenen identisch ist mit der Klasse der wie vorne konstruierten Möbiusgeometrien (genannt $\Sigma(K, F)$).

Somit sind insbesondere die algebraischen Strukturen $K, \mathcal{F}(= \langle 1, D \rangle)$, die im Schiefkörper die Möbiusebenen bestimmen, und $\widetilde{K}, A(\widetilde{K})$, die durch den Satz von van der Waerden / Smid geliefert werden, identisch genau dann, wenn die Geometrien isomorph sind.

Satz 16 zieht nach sich den

Satz 17: Durch je vier paarweise verschiedene, nicht konzyklische Punkte verläuft (genau) eine Möbiushülle, wenn

alle $l \in L \setminus K$ quadratisch über K sind.

Dies hat zwei Konsequenzen, die in den beiden folgenden Sätzen formuliert sind.

Satz 18: Ist L kommutativ und gibt es durch je vier p.v., nicht konzyklische Punkte $A, B, C, D \in \mathcal{P}$ (genau) eine Möbiushülle, so ist L bereits quadratische Körpererweiterung von K .

Beweis: Sei etwa $L \supset K(a, b) \supset K$, wobei a und b quadratisch über K seien und $a \notin K(b)$ gelte. Dann gilt etwa $a^2 - \alpha = 0$ und $b^2 - \beta = 0$ mit $\alpha, \beta \in K^*$, da $\text{char } K \neq 2$ ist. Nun gilt für $\gamma = (1 + b)a$: $\gamma^2 = \alpha + \alpha\beta + 2\alpha b$. Also ist γ quadratisch über $K(b)$, vom Grade vier über K . Folglich ist $a \in K(b)$, d.h. $L = K(b)$.

Satz 19: Ist L nicht kommutativ und gibt es durch je vier p.v., nicht konzyklische Punkte $A, B, C, D \in \mathcal{P}$ (genau) eine Möbiushülle, so ist der die Kreise tragende Körper gleich dem Zentrum K' .

Beweis: Sei $K \neq K'$ und $r \in K' \setminus K$ und $l \in L \setminus K'$. Dann gilt

$$\underbrace{K \subset K(r)}_2 \subset \underbrace{K(r, l)}_2.$$

Mit Satz 18 ergibt sich ein Widerspruch zu Satz 17.

Die Fälle der Kommutativität und Nichtkommutativität zerfallen hier deshalb, weil ein unzerlegbares Polynom $p(x) \in K[x]$ in einer kommutativen Körpererweiterung L maximal zwei Nullstellen aufweist. Ist L nichtkommutativ, so braucht dies nicht der Fall zu sein. So besitzt das Polynom $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ in $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ unter anderem die Nullstellen $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$, $\pm \frac{i+j}{\sqrt{2}}$.

Weiteren Aufschluß gibt ein Satz von Fein und Schacher (21):

Sei G eine endliche Galoiserweiterung eines Körpers K und D ein Schiefkörper mit Zentrum K . Wenn jeder Unterkörper von D mit K auch eine K -isomorphe Kopie von G enthält, damit gilt

- 1.) K ist pythagoräisch,
- 2.) $G = K(\sqrt{-1})$,
- 3.) D ist Quaternionenschiefkörper über K .

Satz 20: Ist L nichtkommutativ und gibt es in $\mathcal{P}$ durch vier paarweise verschiedene, nicht konzyklische Punkte je eine Möbiushülle, welche sämtlich untereinander isomorphe kreisgeometrische Struktur aufweisen, dann ist K als Zentrum von L pythagoräisch, $F = K(\sqrt{-1})$ und L der Quaternionenschiefkörper $\mathbb{H}_K$.

Dieser Satz ergibt sich, wie man leicht sieht, aus dem Satz von Fein und Schacher in Verbindung mit den Sätzen 16, 19 und dem oben von BENZ (13, Seite 229) genannten Klassifikationssatz.

Angabe eines notwendigen und hinreichenden Kriteriums zur
Gültigkeit des Büschelsatzes in Schiefkörpern

Neben dem oben angeführten Satz von Miquel stellt der Büschelsatz einen weiteren kreisgeometrischen Schließungssatz dar. Beide Sätze beinhalten in ihrer klassischen, nicht entarteten Form $(8,3)$ -Konfigurationen (Konfigurationen mit acht ausgezeichneten Punkten, durch die je drei Kreise verlaufen). Die algebraischen Konsequenzen aus der Gültigkeit der beiden Sätze sind jedoch recht unterschiedlich. Im vorigen Kapitel sprachen wir solche bereits bezüglich des Satzes von Miquel an. Nun wollen wir uns also dem Büschelsatz zuwenden, wobei wir weiterhin das Vorliegen einer nichtkommutativen Möbiusgeometrie voraussetzen.

Büschelsatz (vgl. Benz (12) und siehe Abb. 4):

Sind $A, A', B, B', C, C', D, D'$ acht paarweise verschiedene Punkte und haben $AA'BB'$, $AA'CC'$, $AA'DD'$, $DD'CC'$, $BB'DD'$ je konzyklische Lage auf insgesamt mindestens vier paarweise verschiedenen Kreisen, so hat auch $CC'BB'$ konzyklische Lage.

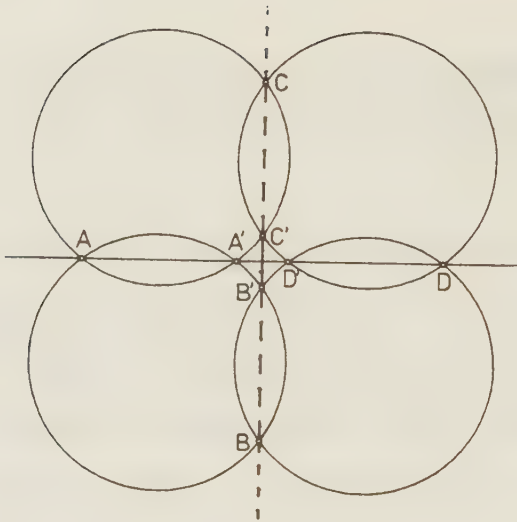


Abb. 4

BENZ (12) zeigt, daß der Büschelsatz in einer Geometrie $\mathcal{A}_F$ gilt, wenn $\mathcal{A}$ über F fastquadratisch ist. Zunächst werde ich die Geometrie $\mathcal{A}_F$ vorstellen und den Begriff "fastquadratisch" klären. Im Anschluß daran, werde ich das genannte Kriterium übertragen auf den nichtkommutativen Fall und dann unter Aufnahme einer kleinen Zusatzbedingung umkehren.

$\mathcal{A}$ sei eine (kommutative) Algebra mit 1 über einem Körper F , wobei $\dim_F \mathcal{A} \geq 2$ gilt. $E \supset F^*$ sei die Einheitengruppe von $\mathcal{A}$,

Als Punkte der Geometrie $\mathcal{A}_F$ gewinnt man Äquivalenzklassen sogenannter zulässiger Paare (x_1, x_2) , von denen man fordert, daß das Ideal $(x_1, x_2) = \mathcal{A}$ ist.

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) : \Leftrightarrow \begin{aligned} \exists r \in E : r x_1 &= y_1 \\ r x_2 &= y_2. \end{aligned}$$

Diese Punktmenge sei projektive Gerade $P(\mathcal{A})$ über $\mathcal{A}$ genannt. $F \cup \{(1, 0)\}$ und die Bilder dieser Menge bezüglich einer Gruppe geeigneter Bijektionen $\Gamma(\mathcal{A})$ von $P(\mathcal{A})$ seien Kreise der Geometrie $\mathcal{A}_F$ genannt. Ist $E = \mathcal{A}^*$, also $\mathcal{A}$ ein Körper, so ist $\mathcal{A}_F$ aufgrund der Konstruktion mit unserer Möbiusgeometrie des vorigen Kapitels identisch, wenn man $\text{char } F \neq 2$ fordert. Diese (kommutative) Geometrie sei von nun an L_K genannt. $\Gamma(\mathcal{A})$ geht dabei über zu $\Gamma(\mathcal{P})$.

Definition 7: $\mathcal{A}$ heißt fastquadratisch (über F), wenn für zwei über F quadratische Elemente $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}^* \setminus F$ gilt, daß ihr Produkt $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ wieder quadratisch über F ist, wenn $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \notin F$ ist, und außerdem die Forderung $N(\gamma_1) \cdot N(\gamma_2) = N(\gamma_1 \cdot \gamma_2)$ gilt.

$N(\gamma)$ ist hierbei die Norm von γ bezüglich der Algebra $F(\gamma)$ (nicht notwendig $\mathcal{A}$!).

Satz 21: Ist $\dim_K L = 2$, so ist L fastquadratisch über K .

Satz 22: L ist fastquadratisch über K genau dann, wenn L maximal eine quadratische Körpererweiterung von K in sich birgt.

Beweis: Birgt L keine quadratische Körpererweiterung von K in sich, so ist L fastquadratisch aufgrund mangelnder Voraussetzung. Hat L genau einen solchen Zwischenkörper in sich, so wende man Satz 21 an.

Nun sei angenommen, daß L fastquadratisch ist und zwei verschiedene quadratische Körpererweiterungen in sich trägt. Da die Charakteristik von $K \neq 2$ ist, gibt es zwei Elemente $a, b \notin K$ aus je einem dieser quadratischen Körper mit den Eigenschaften $a^2 - \alpha = 0$ und $b^2 - \beta = 0$ für $\alpha, \beta \in K$. Nun gilt weiter $((1+a)b)^2 = b^2 + 2ab^2 + a^2b^2 = \beta + 2\beta a + \alpha\beta$. Also ist $(1+a)b$ quadratisch über $K(a)$, vom Grade 4 über K .

Diese Aussage läßt sich nicht auf die nichtkommutative Situation übertragen. Die Quaternionen $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ sind über $\mathbb{R}$ fastquadratisch, tragen aber mit $\mathbb{R}(i)$, $\mathbb{R}(j)$, $\mathbb{R}(k)$, $\mathbb{R}(i+j)$, ..., durchaus verschiedene, ja sogar unendlich viele quadratische Körpererweiterungen von $\mathbb{R}$ in sich.

BENZ (12) zeigt nun, wie oben schon erwähnt, daß der Büschelsatz Gültigkeit hat, wenn die Algebra $\sqrt{A}$ fastquadratisch ist über F .

Ich beweise dies nun für den nichtkommutativen Körperfall, in Anlehnung an den genannten Beweis von BENZ.

Satz 23: Sei L ein Schiefkörper mit Zentrum K ($\text{char } K \neq 2$). Ist L über K fastquadratisch, so gilt in der nichtkommutativen Möbiusgeometrie L_K der Büschelsatz.

Lemma 1: Sind A, A', B, B', P, P' paarweise verschiedene Punkte, haben A, A', B, B' ; A, A', P, P' und B, B', P, P' je konzyklische Lage, nicht aber A, A', B, P , so ist γ

$$\gamma = DV(A, A'; P, B)$$

ein über K quadratisches Element aus $L \setminus K$ mit

$$N(\gamma) = DV(A, A'; B', B) \cdot DV(P', P; A', A) \in K^*.$$

Beweis: Aufgrund der Invarianz der Doppelverhältnisse gegenüber linearen Abbildungen und aufgrund der Transitivität können wir o.B.d.A. annehmen $A = 0$, $A' = \infty$, $B = 1$. Dann gilt
 $\gamma = DV(0, \infty; P, 1) = (-1)^{-1}(-P) = P$ und weiter für

$$\begin{aligned} b &= DV(A, A'; B', B) \cdot DV(P, P'; A, A') = DV(0, \infty; B', 1) \cdot DV(P, P'; 0, \infty) \\ &= (-1)^{-1}(-B') P P'^{-1} = B' P P'^{-1} \in K^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= DV(P, A'; P', A) \cdot DV(B, A; B', A') \cdot DV(P, B'; B, P') \\ &= DV(P, \infty; P', 0) \cdot DV(1, 0; B', \infty) \cdot DV(P, B'; 1, P') \\ &= P^{-1}(P - P') \underbrace{(1 - B')}_{\in K^*} \underbrace{(-B')^{-1}}_{\in K^*} (P - P')^{-1} (P - 1) \underbrace{(B' - 1)^{-1}}_{\in K^*} (B' - P') \\ &= P^{-1}(B')^{-1} (P - 1) (B' - P') \in K^* \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} c &= DV(A, A'; B', B) \cdot DV(P', P; A', A) \\ &= DV(0, \infty; B', 1) \cdot DV(P', P; \infty, 0) \\ &= (-1)^{-1}(-B') (P')^{-1} P = B' (P')^{-1} P \end{aligned}$$

die Identität

$$\gamma^2 + (vb - b - 1) \gamma + c = 0,$$

womit alles gezeigt wäre. Nachweis dieser Identität:

$$\begin{aligned}
 vb - b - 1 &= P^{-1}(B')^{-1}(P-1) (B' - P') B' P(P')^{-1} - B' P(P')^{-1} - 1 \\
 &= (P-1) (B' - P') (P')^{-1} - B' P(P')^{-1} - 1 \\
 &= (P-1) (B'(P')^{-1} - 1) - B' P(P')^{-1} - 1 \\
 &= P B'(P')^{-1} - P - B'(P')^{-1} + 1 - B' P(P')^{-1} - 1 \\
 &= -P - B'(P')^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma^2 + (vb - b - 1) \gamma + c &= P^2 + (-P - B'(P')^{-1}) P + B'(P')^{-1} P \\
 &= P^2 - P^2 - B'(P')^{-1} P + B'(P')^{-1} P = 0.
 \end{aligned}$$

Lemma 2: Es seien $A, A', B, B', C, C', D, D'$ paarweise verschiedene Punkte derart, daß $A, A', B, B'; A, A', C, C'; A, A', D, D'; B, B', C, C'$ und B, B', D, D' je konzyklisch sind, nicht aber A, A', B, C oder A, A', B, D . Nach Lemma 1 sind dann $\gamma_1 = DV(A, A'; C, B)$ und $\gamma_2 = DV(A, A'; D, B)$ über K quadratische Elemente aus $L \setminus K$. Nun gilt

$$DV(D, C'; C, D') = DV(D, A'; A, D') \left((1 - \gamma_2^{-1} \gamma_1) + \frac{N(\gamma_1)}{N(\gamma_2)} (1 - \gamma_1^{-1} \gamma_2) \right)$$

$$\cdot DV(C', A'; A, C).$$

Man siehe auch Abb. 5.

Beweis: Wieder kann ich o.B.d.A. annehmen $A' = \infty$, $A = 0$, $B = 1$.
 So gilt also $\gamma_1 = C$, $\gamma_2 = D$ und $N(\gamma_1) = B' C'^{-1} C$, $N(\gamma_2) = B' (D')^{-1} D$.
 Die rechte Seite der zu beweisenden Identität lautet nun also:

$$\begin{aligned}
 & (D - D')^{-1} D((1 - D^{-1} C) + \frac{B'(C')^{-1} C}{B'(D')^{-1} D} (1 - C^{-1} D)) (C' - C)^{-1} C' \\
 = & (D - D')^{-1} (D - C) (C' - C)^{-1} C' + \\
 & (D - D')^{-1} D [D^{-1} D' (C')^{-1} C (C' - C)^{-1} C' - \underbrace{D^{-1} D' (C')^{-1} C C^{-1} D (C' - C)^{-1} C'}_{= DV(A, A'; D'D) \in K^*}] \\
 = & (D - D')^{-1} (D - C) (C' - C)^{-1} C' \\
 + & (D - D')^{-1} [\underbrace{D' (C')^{-1} C (C' - C)^{-1} C'}_{= -DV(A, C'; C, A') \in K^*} - \underbrace{D (C')^{-1} D' (C' - C)^{-1} C'}_{= DV(C', A'; A, C) \in K^*}] \\
 = & (D - D')^{-1} (D - C) (C' - C)^{-1} C' \\
 - & (D - D')^{-1} [D (C' - C)^{-1} D' - C (C' - C)^{-1} D'] \\
 = & (D - D')^{-1} (D - C) (C' - C)^{-1} C' - (D - D')^{-1} (D - C) (C' - C)^{-1} D' \\
 = & DV(D, C'; C, D')
 \end{aligned}$$

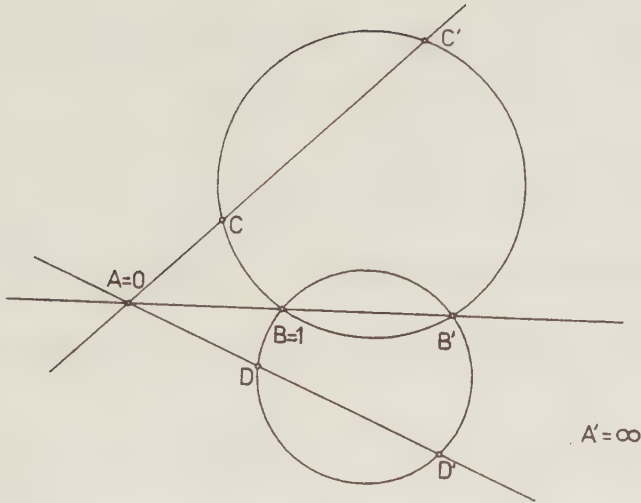


Abb. 5

In der Büschelsatzkonfiguration liegt nun die Situation von Lemma 2 vor. A, A', B, C oder A, A', B, D können nicht konzyklisch sein, da sonst die Kreise durch A, A', B, B' ; A, A', C, C' und B, B', C, C' oder die durch A, A', D, D' und B, B', D, D' zusammenfielen. Nun können wir den Satz 22 beweisen.

Beweis: Der Büschelsatz gilt, wenn sichergestellt ist, daß

$$((1 - \gamma_2^{-1} \gamma_1) + \frac{N(\gamma_1)}{N(\gamma_2)} (1 - \gamma_1^{-1} \gamma_2)) \in K \text{ gilt.}$$

Es gilt, anknüpfend an den Beweis von Lemma 2:

$\gamma_1 = C$ und $\gamma_2 = D$. Da $\gamma_2 \in L \setminus K$ quadratisch über K ist, gilt $\gamma_2^2 + a\gamma_2 + N(\gamma_2) = 0$ mit einem $a \in K$.

Hieraus ergibt sich, daß $N(\gamma_2^{-1}) = \frac{1}{N(\gamma_2)}$ (man beachte nämlich,

daß $\langle 1, \gamma_2 \rangle$ quadratische Körpererweiterung von K sein muß).

Da L über K fastquadratisch ist, gilt nun

$$(\gamma_2^{-1} \gamma_1)^2 + r (\gamma_2^{-1} \gamma_1) + \frac{N(\gamma_1)}{N(\gamma_2)} = 0$$

für ein $r \in K$

oder $\gamma_2^{-1} \gamma_1 \in K$, dies bedeutet jedoch

$$D^{-1}C = DV(A, A'; C, D) \in K.$$

Liegen jedoch A, A', C, D konzyklisch, so stimmen die Kreise A, A', C, C' , und A, A', D, D' überein, so daß C, C', D, D' konzyklisch sind. Damit wäre alles gezeigt.

Im ersten Fall jedoch gilt nun:

$$\begin{aligned} & ((1 - \gamma_2^{-1} \gamma_1) + \frac{N(\gamma_1)}{N(\gamma_2)} (1 - \gamma_1^{-1} \gamma_2)) \\ &= 1 + r + \frac{N(\gamma_1)}{N(\gamma_2)} \in K. \end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen.

Nun werde ich unter einer kleinen Zusatzvoraussetzung den eben bewiesenen Satz 23 umkehren.

Satz 24: Die Mächtigkeit des Körpers K sei größer oder gleich 5. L sei wieder Schiefkörper über K . Gilt in der dazugehörigen nichtkommutativen Möbiusgeometrie der Büschelsatz, so ist L fastquadratisch über K .

Beweis: Habe L kein quadratisches Element über K , dann ist L trivialerweise fastquadratisch über K . Außerdem gilt der Büschelsatz mangels Voraussetzungen, da (man vgl. Lemma 1) die

Büschelsatzvoraussetzungen automatisch ein über K quadratisches Element mit nach sich ziehen.

Nun habe L zwei über K quadratische Elemente C, D . Da $|K| \geq 5$ gilt, ist die in Abb. 5 gezeigte Konfiguration möglich. Da der Büschelsatz gilt, sind also C, C', D, D' konzyklisch, was, man vgl. mit dem Beweis von Satz 23,

$$(1 - D^{-1}C) + \frac{N(C)}{N(D)} (1 - D^{-1}C) \in K$$

nach sich zieht.

Hieraus ergibt sich entweder $D^{-1}C \in K$, woraus $D \in \langle 1, C \rangle$ folgt. Die Normen von D und C über dem gemeinsamen Körper $\langle 1, C \rangle$ sind somit multiplikativ.

Im anderen Falle folgt durch elementare Umformungen:

$$(C^{-1}D)^2 - r \cdot \frac{N(D)}{N(C)} C^{-1}D + \frac{N(D)}{N(C)} = 0$$

für ein $r \in K$.

Somit ist alles gezeigt.

Ist die Mächtigkeitsvoraussetzung erfüllt, so folgt mit Hilfe von Satz 22 für die kommutative Situation, daß der Büschelsatz die Geometrie in eine Ebene zwingt.

Literaturangabe

- [1] Benz, W.: Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie auf Grund von Doppelverhältnissen. J. Reine Ang. Math. 199, 56-90 (1958).
- [2] Benz, W.: Zur Theorie der Möbiusebenen. I. Math. Ann. 134, 237-247 (1958).
- [3] Benz, W.: Über Möbiusebenen. Ein Bericht. Jber. Deutsch. Math. Verein. 63, 1-27 (1960).
- [4] Benz, W.: Zur Möbiusgeometrie über einem Körperpaar. Arch. Math. 13, 136-146 (1962).
- [5] Benz, W.: Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Miquel. Publ. Math. Debrecen 9, 227-230 (1962).
- [6] Benz, W.: Zur Theorie der Möbiusebenen. II. Math. Ann. 149, 211-216 (1962/1963).
- [7] Benz, W.: Zykelverwandtschaften als Berührungstransformation. J. Reine Angew. Math. 214/215, 53-60 (1964).
- [8] Benz, W.: Eine Kennzeichnung der van der Waerden-Smid-Geometrien. Math. Ann. 165, 19-23 (1966).
- [9] Benz, W.: Nichtkommutative Möbiusgeometrie. Math. Nachr. 38, 349-359 (1968).
- [10] Benz, W.: Die 4-Punkt-Invarianten in der projektiven Geraden über einem Schiefkörper. Ann. Polon. Math. 21, 97-101 (1968).
- [11] Benz, W.: Zur Geometrie der Körpererweiterungen. Canad. J. Math. 21, 1097-1122 (1969).
- [12] Benz, W.: Zum Büschelsatz in der Geometrie der Algebren. Erscheint in Monatsh. Math..
- [13] Benz, W.: Vorlesungen über Geometrie der Algebren. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York, (1973)
- [14] Chen, Y.: Zur Axiomatik der ebenen Geometrie von Lie über einem Körper. Dissertation Bochum 1967.
- [15] Chen, Y.: Der Satz von Miquel in der Möbiusebene. Math. Ann. 186, 81-100 (1970).

- [16] Ewald, G.: Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie. Math. Ann. 131, 354-371 (1956).
- [17] Ewald, G.: Über eine Berühreigenschaft von Kreisen. Math. Ann. 134, 58-61 (1957).
- [18] Ewald, G.: Beispiel einer Möbiusebene mit nichtisomorphen affinen Unterebenen. Arch. Math. 11, 146-150 (1960).
- [19] Ewald, G.: Ein Schließungssatz für Inzidenz und Orthogonalität in Möbiusebenen. Math. Ann. 142, 1-21 (1960/1961).
- [20] Ewald, G.: Aus konvexen Kurven bestehende Möbiusebenen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 30, 179-187 (1967).
- [21] Fein and Schacher: The ordinary Quaternions over a pythagorean field, Am. Math. Soc. 60, S. 16-18 (1976).
- [22] Herstein, I.N.: Algebra. Weinheim (1978).
- [23] Lingenberg, R.: Grundlagen der Geometrie. 2. Auflage, Mannheim (1976).
- [24] Mäurer, H.: Über die Winkelmetrik von Smid in Möbiusebenen und ihre Kennzeichnung durch den vollen Satz von Miquel. Staatsexamensarbeit Mainz 1961.
- [25] Mäurer, H.: Möbius- und Laguerre-Geometrien über schwach konvexen Semiflächen. Math. Z. 98, 355-386 (1967).
- [26] Mäurer, H.: Ein axiomatischer Aufbau der mindestens 3-dimensionalen Möbius-Geometrie. Math. Z. 103, 282-305 (1968).
- [27] Pickert, G.: Grundlagen der Geometrie. 2. Auflage, Mannheim (1975).
- [28] Waerden, B.L. van der, Smid, L.J.: Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerregeometrie. Math. Ann. 110, 753-776 (1935).

Lebenslauf

Ich, Roland Graf, wurde am 4.9.1955 als erster von drei Söhnen des Dipl. Kfms Heinz-Reiner Graf und seiner Ehefrau Hildegard, geb. Weillbrock, in Gelsenkirchen geboren.

Im Frühjahr 1961 wurde ich in eine Gelsenkirchener Grundschule eingeschult. Vier Jahre später wechselte ich die Schule und besuchte bis zum Sommer 1974 das Carl-Friedrich-Gauß-Gymnasium in Gelsenkirchen. Dort legte ich das Abitur am 14. Juni 1974 ab.

Anschließend absolvierte ich die Wehrpflicht und nahm zum Wintersemester 1975/76 das Studium der Mathematik an der Ruhr-Universität Bochum auf. Dieses schloß ich im Herbst 1981 ab.

Seitdem bin ich als wissenschaftlicher Angestellter an der mathematischen Abteilung der Ruhr-Universität Bochum tätig.

Bochum 1985

Roland Graf

